10. gyakorló feladatsor (kiadva: 2016. április 21., ellenőrzés: 2016. április 28.)

Elektromágnesség, emelt szint, 2015/16, csütörtök, 10:15-11:45, 4.52

10.1. Pontszerű forrásból töltések áramlanak ki. A töltések áramlását egy gömbszimmetrikus, stacionárius (időfüggetlen) $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ töltéssűrűség írja le. Határozd meg az indukált $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ mágneses indukció vektormezőt.

10.2. (Pályi Andrástól hallottam, aki Vigh Mátétól hallotta.) Csokimikulás alufólia-csomagolását elektromosan feltöltjük. A levegő nemnulla vezetőképessége miatt a Mikulás lassan "kisül", azaz a töltések elhagyják az alufóliát. Írd le a töltések áramlása következtében kialakuló mágneses teret.

Megoldás vázlata.

Az előző példa alapján lehet egy olyan intuíciónk, hogy a teljes áram $(\boldsymbol{j} + \epsilon_0 \dot{\boldsymbol{E}})$ eltűnik a teljes térben, és emiatt nem indukálódik mágneses tér.

Feltételezzük, hogy minden időpillanatban és minden pontban $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = \sigma \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$, ahol σ a levegő fajlagos vezetőképessége.

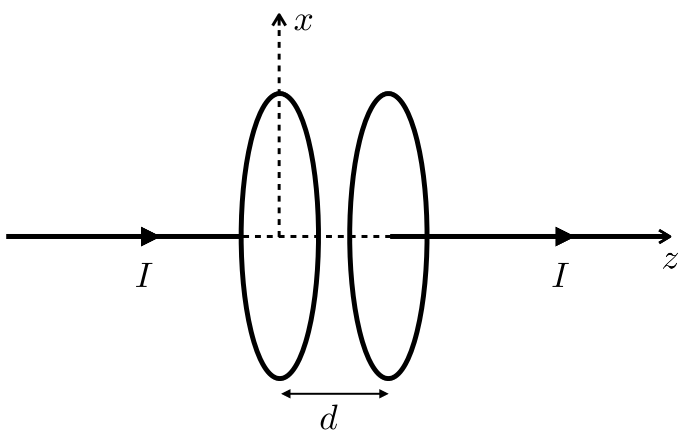
Tetszőleges $\boldsymbol{r}$ pont körül felveszünk egy olyan kis téglatestet, aminek két átellenes lapja merőleges az áramvonalakra. A $\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$ feltétel miatt ezek a lapok az elektromos erővonalakra is merőlegesek lesznek. A kontinuitási egyenlet szerint

Helyfüggő σ esetén is helyes a megoldás?

10.3. Az ábrán látható, kör alakú fegyverzetekből álló kondenzátort I egyenárammal egyenletesen töltjük. A $t = 0$ időpontban nulla töltés van a fegyverzeteken. A fegyverzetek sugara R; a baloldali fegyverzet az xy síkban fekszik, a jobb oldali pedig az xy síkkal párhuzamosan, attól d távolságban. Határozd meg a mágneses tér y komponensét az $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, 0, z_0)$ pontban, ha

a) $z_0 < 0$,
b) $0 < z_0 < d$ és $R < x_0$,
c) $0 < z_0 < d$ és $x_0 < R$.

A kondenzátor szórt terét hanyagold el.



Összefoglaló (elektromágneses hullámok). A $\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \mu_0\epsilon_0\partial_t\boldsymbol{E}$ és $\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\partial_t\boldsymbol{B}$ vákuumbeli Maxwell-egyenletekből egyszerűen adódik az E- és B-terekre vonatkozó vákuumbeli hullámegyenlet:

$$\Delta\boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2}\partial_t^2\boldsymbol{E} \tag{1}$$

$$\Delta\boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\partial_t^2\boldsymbol{B}, \tag{2}$$

ahol $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ a vákuumbeli fénysebesség.

A fenti hullámegyenleteket megoldják például az ún. lineárisan polarizált síkhullámok:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_0 \cos(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r} - \omega t + \varphi), \tag{3}$$

ha $\omega = c|\boldsymbol{k}|$.

10.4. Tekintsünk egy, a z tengellyel párhuzamosan haladó elektromágneses síkhullámot:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = E_0\boldsymbol{e}_x\cos(kz-\omega t), \tag{4}$$
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{B}_0\cos(kz-\omega t). \tag{5}$$

Add meg a $\boldsymbol{B}_0$ vektort!

10.5. Két azonos hullámszámú és frekvenciájú (k és ω), azonos amplitúdójú (E_0), azonos fázisú, lineárisan polarizált, monokromatikus elektromágneses síkhullám halad vákuumban a z tengely irányába. Az egyik hullám elektromos polarizációja x irányú, a másiké y irányú.
a) Írd fel az eredő elektromos térerősségvektort a hely és az idő függvényeként: $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=?$
b) Rajzold fel $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}=0,t)$-t az E_x-E_y síkon!

10.6. Az előző feladatban szereplő elektromágneses síkhullámok közül legyen az y-irányban polarizáltnak $\pi/2$ fáziskésése az x-irányban polarizált hullámhoz képest. Rajzold fel az origóbeli eredő $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}=0,t)$ térerősségvektor időfüggését az E_x-E_y síkon. Rajzold fel ugyanezt az $\boldsymbol{r}_2=(0,0,\pi/2k)$ pontra vonatkozólag.

10.7 A z tengely irányába haladó különböző frekvenciájú, lineárisan polarizált síkhullámok alábbi „összeadásával" képezzünk ún. *hullámcsomagot*:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\int_{-\infty}^{\infty}dk\frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta k}e^{-\left(\frac{k-k_0}{\Delta k}\right)^2}\left[E_0\boldsymbol{e}_x\cos(\omega(k)t-kz)\right], \tag{6}$$

ahol $\omega(k)=c|k|$, c a vákuumbeli fénysebesség, a k_0 és a Δk adott hullámszám-dimenziójú paraméterek, és $0<\Delta k\ll k_0$.
a) Lásd be, hogy a fenti $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ függvény megoldja az elektromos térerősségre vonatkozó vákuumbeli hullámegyenletet!
b) Végezd el a k szerinti integrálást! *Segítség.* A megoldáshoz hasznos az alábbi állítás: Legyen $\delta>0$ és γ komplex szám. Ekkor $\int_{-\infty}^{\infty}dke^{-\delta(k+\gamma)^2}=\sqrt{\frac{\pi}{\delta}}$.
c) Ábrázold a hullámcsomagot (azaz $E_x(z)$-t) a $t=0$ időpontban! Hol található a hullámcsomag középpontja? Milyen paraméter adja meg a hullámcsomag szélességét? Milyen paraméter határozza meg a hullámcsomag térbeli oszcillációinak hullámhosszát?
d) Vizsgáld adott $t>0$ időpontban a hullámcsomagot, és erre az időpontra vonatkozólag is válaszolj a c) feladat kérdéseire. Mekkora sebességgel halad a hullámcsomag középpontja?

További gyakorló feladatok: Elméleti Fizikai Példatár, 2. kötet, 9.1, 9.2, 9.3, 9.5, 9.6, 9.23 feladatok.