

5. gyakorló feladatsor (kiadva: 2016. március 3., ellenőrzés: 2016. március 10.)

Elektromágnesség, emelt szint, 2015/16, csütörtök, 10:15-11:45, 4.52

Töltések és szigetelők – összefoglalás.

Lineárisan polarizálható izotrop szigetelők (dielektrikumok) elektrosztatikus viselkedését az ϵ_r relatív dielektromos együtthatójuk (dielektromos permittivitásuk) vagy az ϵ dielektromos együtthatójuk jellemzi. Dimenziók: $[\epsilon_r] = 1$ és $[\epsilon] = [\epsilon_0] = \text{F/m} \equiv \frac{\text{A}^2 \text{s}^4}{\text{kg m}^3}$ ahol ϵ_0 a vákuum dielektromos együtthatója.

Az elektromos eltolás vektormezeje $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r})$ ahol $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ az \mathbf{r} pontbeli polarizációs töltéssűrűség. Lineárisan polarizálható izotrop dielektrikum jelenlétében $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r})$.

Gauss-törvény dielektrikum jelenlétében: $\oint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{F} = Q_{\text{szabad},V}$ illetve $\text{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_{\text{szabad}}(\mathbf{r})$.

Határfeltételek két dielektrikum határán. Legyen egy határfelület egyik oldalán A típusú dielektrikum, a másik oldalán B típusú dielektrikum. Legyen \mathbf{r}' a határfelület egy pontja. Legyen továbbá $\mathbf{n}_{AB}(\mathbf{r}')$ a határfelület \mathbf{r}' pontbeli azon normálvektora, amely a B anyag felől az A anyag felé mutat. Ekkor igaz, hogy

$$\mathbf{n}_{AB}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{D}_A(\mathbf{r}') - \mathbf{D}_B(\mathbf{r}')) = \sigma_{\text{szabad}}(\mathbf{r}') \quad (1)$$

$$\mathbf{E}_{A,\parallel}(\mathbf{r}') - \mathbf{E}_{B,\parallel}(\mathbf{r}') = 0, \quad (2)$$

ahol $\sigma_{\text{szabad}}(\mathbf{r}')$ a határfelület \mathbf{r}' pontjában levő szabad felületi töltéssűrűség, és $\mathbf{E}_{A,\parallel}(\mathbf{r}')$ illetve $\mathbf{E}_{B,\parallel}(\mathbf{r}')$ jelöli az elektromos térerősségvektor határfelülettel párhuzamos komponensét az A illetve B anyagban.

Kondenzátor energiája: $E_{\text{energia}} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} Q^2 / C = \frac{1}{2} CV^2$

Elektrosztatikus tér energiasűrűsége: $w_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r})$.

5.1 Szigetelővel körülvevett ponttöltés.

Pontszerű q töltést koncentrikusan körülveszünk egy R_1 belső sugarú, R_2 külső sugarú, ϵ dielektromos együtthatójú (lineárisan polarizálható, izotrop és homogén) szigetelő gömbhéjjal. Határozd meg a $\varphi(\mathbf{r})$ elektromos potenciált, az $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ elektromos térerősséget és a $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ elektromos eltolásvektort a tér tetszőleges \mathbf{r} pontjában.

5.2. Szigetelővel kitöltött kondenzátorok kapacitása és energiája.

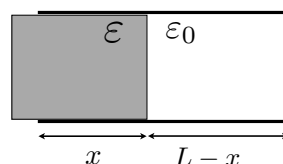
Határozd meg egy homogén, ϵ dielektromos együtthatójú szigetelő anyaggal kitöltött (a) hengerkondenzátor (b) gömbkondenzátor kapacitását és energiáját. A belső fegyverzet sugara R_1 , a külső R_2 . Az (a) feladatban a fegyverzetek hossza L .

5.3. Inhomogén dielektrikum síkkondenzátorban.

Egymástól d távolságban levő fegyverzetek által alkotott síkkondenzátort részben levegő ($\epsilon_{\text{lev}} \approx \epsilon_0$), részben ϵ dielektromos együtthatójú dielektrikum tölt ki. Az alsó fegyverzet feletti a vastag rétegben és a felső fegyverzet alatti a vastag rétegben van a levegő, a közöttük levő $b = d - 2a$ vastag rétegben pedig a dielektrikum. A fegyverzetek felülete A . Számold ki a kondenzátor kapacitását!

5.4. Dielektrikumra ható erő síkkondenzátorban.

Tekintsük az ábrán látható elrendezést: egy szigetelő tömb részben kitölti a síkkondenzátor $L \times L$ felületű, négyzet alakú fegyverzetei közötti térrészt. Határozd meg a kondenzátor kapacitását! Mekkora és milyen irányú erő hat a szigetelő tömbre, ha a fegyverzetek töltése q és $-q$? (Segítség: az erő számolható például az $F = -\frac{dE_{\text{energia}}(x)}{dx}$ összefüggésből, ahol E_{energia} a rendszer elektrosztatikus energiája.) A számolások egyszerűsítése végett tételezzük fel, hogy a térerősség és az elektromos eltolásvektor csak a fegyverzetek között nem nulla, illetve hogy ezek a térmennyiségek az egyes tartományokon belül (azaz külön-külön a szigetelőben és a vákuumban) homogének és függőleges irányúak.



5.5. Tükörtöltés-módszer dielektrikumokra

Tegyük fel, hogy a tér $z > 0$ felét ϵ_1 dielektromos együtthatójú, a $z < 0$ felét pedig ϵ_2 dielektromos együtthatójú szigetelő tölti ki. Helyezzünk egy q ponttöltést a határfelület fölé, attól d távolságra. Határozd meg az elektromos eltolásvektor és térerősségvektor értékét a tér tetszőleges \mathbf{r} pontjában!