3. gyakorló feladatsor (kiadva: 2016. február 18., ellenőrzés: 2016. február 25.)

Elektromágnesség, emelt szint, 2015/16, csütörtök, 10:15-11:45, 4.92

2.1. *Szimmetrikus töltéseloszlások és az integrális Gauss-törvény.*

Az integrális Gauss-törvény szerint egy adott $\rho(\boldsymbol{r})$ töltéseloszlás jelenlétében egy tetszőleges V térfogatot határoló ∂V zárt határfelületre

$$\oint_{\partial V} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{F} = \frac{Q_V}{\varepsilon_0},$$

ahol $Q_V := \int_V \mathrm{d}^3 r \rho(\boldsymbol{r})$ a V térfogatban található össztöltés.

Az integrális Gauss-törvény alkalmazásával számítsd ki

(a) egy z tengelyre eső, egyenletes ν vonalmenti töltéssűrűségű, végtelen hosszú egyenes fonál,

(b) egy homogén ρ_0 térfogati töltéssűrűségű, a z tengellyel egybeeső tengelyű, R sugarú, végtelen hosszú tömör henger,

(c) egy origóban elhelyezett pontszerű q töltés,

(d) egy origó középpontú, homogén ρ_0 térfogati töltéssűrűségű, R sugarú tömör gömb

által keltett elektromos térerősséget a tér $\boldsymbol{r}_0 = (d, 0, 0)$ pontjában.

Megjegyzések: (1) Fontos eleme a megoldásnak az integrális Gauss-törvényben használandó V térfogat megválasztása. Az (a) feladatban például célszerű V-t egy z tengellyel egybeeső tengelyű, d sugarú (tetszőleges véges magasságú) hengernek választani. (2) A megoldáshoz szükséges még a töltéseloszlás szimmetriáit is megvizsgálni, abból következtetni kell a térerősség-vektormező szimmetriáira, és a következtetéseket fel kell használni az integrális Gauss-törvény bal oldalát adó felületi integrál kiértékelése során.

2.2. *Körlap elektrosztatikus potenciálja.*

Határozd meg az x-y síkban fekvő, végtelenül vékony, origó középpontú, egyenletes σ felületi töltéssűrűségű, R sugarú körlap által keltett elektrosztatikus potenciált az $\boldsymbol{r}_0 = (0, 0, d)$ pontban, azaz a körlap középpontja felett d távolságban. Ebből számítsd ki az elektromos térerősség z komponensét ugyanebben az $\boldsymbol{r}_0$ pontban.

[Emlékeztető: Tekintsünk egy n darab pontszerű töltésből álló rendszert, melyben a töltések nagysága $q_1, \ldots, q_n$, helyvektoraik pedig $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n$. Ekkor a tér tetszőleges $\boldsymbol{r}$ pontjában az elektrosztatikus potenciál értéke

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|},$$

és az elektromos térerősségvektor $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\varphi(\boldsymbol{r}) \equiv -\mathrm{grad}\varphi(\boldsymbol{r})$]

2.3. *Tömör gömb elektrosztatikus potenciálja.*

Határozd meg az origó középpontú, R sugarú, homogén ρ_0 térfogati töltéssűrűségű tömör gömb által keltett elektrosztatikus potenciált a tér gömbön kívüli $\boldsymbol{r}_0 = (0, 0, d)$ pontjában (azaz $d > R$).

2.4. *Elektromos dipólus elektrosztatikus potenciálja.*

Tekintsünk egy elektromos dipólust, ami két darab pontszerű töltésből áll, melyek nagysága q és $-q$, helyvektoraik pedig $\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{d}/2$ és $\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{d}/2$. Lásd be, hogy a tér azon $\boldsymbol{r}$ pontjaiban, melyek sokkal messzebb vannak a dipólustól, mint annak d kiterjedése, a dipólus által keltett elektrosztatikus potenciál közelítőleg

$$\varphi(\boldsymbol{r}) \approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q\boldsymbol{d} \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|} \right) \tag{1}$$

alakú.

Megjegyzés: a bizonyításban szükség van egy többváltozós függvény elsőrendű Taylor-sorfejtésére.

2.5 *Elektromos térerősség és feszültség.*

Számítsd ki az feszültséget (potenciálkülönbséget) az $\boldsymbol{r}_1 = (0, 0, 0)$ és a $\boldsymbol{r}_2 = (d, 0, 0)$ pontok között, ha a térerősség-vektormező

(a) $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_0 \boldsymbol{e}_x$ alakú, ahol $\boldsymbol{e}_x$ az x irányú egységvektor,

(b) $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_0(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)/\sqrt{2}$ alakú,

(c) egy q töltésű, $r_0 = (-d, 0, 0)$ pozíciójú ponttöltéstől származik,

(d) egy q töltésű, $r_0 = (-d, -d, 0)$ pozíciójú ponttöltéstől származik.