

1. gyakorló feladatsor (kiadva: 2016. február 11., ellenőrzés: 2016. február 18.)

Elektromágnesség, emelt szint, 2015/16, csütörtök, 10:15-11:45, 5.89

1.1. Integrálok.

a) Bizonyítsd be, hogy

$$\int dt \frac{1}{\operatorname{ch}^2(t)} = \operatorname{th}(t) + \operatorname{const}. \quad (1)$$

b) Add meg ezt a határozatlan integrált (megsejthető):

$$\int dz \frac{z}{\sqrt{d^2 + z^2}} =? \quad (2)$$

c) Add meg ezt a határozatlan integrált (megsejthető):

$$\int dz \frac{z}{\sqrt{d^2 + z^2}^3} =? \quad (3)$$

d) Bizonyítsd be, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{\sqrt{z^2 + d^2}^3} = \frac{2}{d^2}.$$

Útmutatás: a),d): Haszd pl. a hiperbolikus függvényekre vonatkozó azonosságokat (ld. pl. wikipedia). d): Használd a $z/d = \operatorname{sh} t$ helyettesítést.

1.2. Egyenes fonál elektromos tere. Az elektromos térerősségre vonatkozó Coulomb-törvény szerint az $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ pontokba helyezett, rendre q_1, q_2, \dots, q_N töltéssel rendelkező ponttöltések az \mathbf{r} pontban

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

elektromos térerősséget keltenek. Ennek segítségével határozd meg a végtelen hosszú, egyenes ν vonalmenti töltéssűrűségű, egyenes fonál által keltett elektromos térerősségvektort a fonáltól d távolságban.

Megjegyzések:

1. Az egyenes ν vonalmenti töltéssűrűség azt jelenti, hogy a fonál bármely l hosszú szakaszán $\nu \cdot l$ mennyiségű töltés található.
2. Egy lehetséges megoldási terv: (i) Vegyük fel úgy a koordináta-rendszert, hogy a fonál egybeesik a z tengellyel, és a vizsgált \mathbf{r} pont – ahol a térerősséget keressük – az x tengelyre esik. (ii) Osszuk a fonalat egyenlő, Δz hosszúságú kis szakaszokra, az egyes szakaszokat tekintsük pontszerű töltéseknek, és összegezzük fel az egyes szakaszok által keltett járulékokat a térerősséghez. (iii) Végezzük el a $\Delta z \rightarrow 0$ határátmenetet, és így származtassunk egy integrálformulát a fonál által az \mathbf{r} pontban keltett térerősségre. (iv) Végezzük el az integrálást.

1.3. Hasáb elektromos tere. Egyenes ρ_0 térfogati töltéssűrűségű, négyzet alapú hasáb tölti ki az $(x, y, z) \in [0, a] \times [0, a] \times [0, b]$ térrészt. A Coulomb-törvény segítségével fejezd ki egy háromdimenziós integrál alakjában a hasáb által keltett elektromos térerősséget a tér tetszőleges $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ pontjában. (Ez megtehető pl. úgy, hogy az előző feladat végén leírt, egydimenziós töltéseloszlás esetén használandó módszert általánosítod három dimenzióra.)

Megjegyzés: az egyenes ρ_0 töltéssűrűség azt jelenti, hogy a töltött test bármely V térfogatú részének össztöltése $\rho_0 \cdot V$.

1.4. Körlap elektromos tere. Egyenes σ felületi töltéssűrűségű, R sugarú körlap fekszik az x - y síkban, középpontja egybeesik az origóval. A Coulomb-törvény segítségével számítsd ki a $\mathbf{r}_0 = (0, 0, d)$ pontban, azaz a kör középpontja fölött d távolságban, az elektromos térerősségvektort. Az $R \rightarrow \infty$ határesetet vizsgálva add meg a végtelen kiterjedésű, egyenesen töltött sík által keltett elektromos térerősséget a sík felett d távolságra! A kapott térerősség folytonos függvénye d -nek?