

1. gyakorlat (2016. február 11.)

Elektromágnesség, emelt szint, 2015/16, csütörtök, 10:15-11:45, 5.89

1. Divergencia, rotáció. Legyen \mathbf{E}_0 , \mathbf{a} , \mathbf{b} konstans vektorok, illetve α konstans valós szám. Számold ki, lehetőleg indexes deriválással, az $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ vektormező divergenciáját és rotációját, ha

- $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0$,
- $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}$,
- $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \alpha \mathbf{r}$
- $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{2} \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}$.

2. Gradiens. Számold ki a $\phi(\mathbf{r})$ vektormező gradiensét, ha

- $\phi(\mathbf{r}) = \alpha x$,
- $\phi(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{r} \equiv \frac{\alpha}{|\mathbf{r}|}$,
- $\phi(\mathbf{r}) = r^2$,
- $\phi(\mathbf{r}) = \cos(x/\lambda)$,
- $\phi(\mathbf{r}) = \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})$.

3. Taylor-sor. Határozd meg az alábbi függvények nulla körüli másodrendű Taylor-sorát.

- $f(x) = \frac{1}{d+x}$,
- $g(x) = \frac{1}{(d+x)^2}$,
- $h(x) = \frac{1}{(d+x)^2} + \frac{1}{(-d+x)^2}$,
- $f(x) = \cos(kx)$,
- $f(x) = e^{ikx}$.

Ha nincs számológéped, akkor a lenti numerikus feladatokban elég nagyságrendi becsléseket végezni.

4. Coulomb-törvény. Tekintsünk két ponttöltést, amik az \mathbf{r}_1 és \mathbf{r}_2 pontokban helyezkednek el a térben, és töltésük rendre q_1 és q_2 . A Coulomb-törvény szerint ilyenkor az 1-es ponttöltésre ható \mathbf{F}_1 erővektor

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \quad (1)$$

alakú, ahol $\epsilon_0 \approx 8.8 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ a vákuum permittivitása, más néven a vákuum dielektromos állandója. A fenti Coulomb-törvényt kicsit tömörebben írhatjuk, ha használjuk a k_e Coulomb-állandót, $k_e := \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \times 10^9 \text{ m/F}$.

- Add meg a 2-es ponttöltésre ható erővektort.
- Fejezd ki a vákuum permittivitásának mértékegységét SI alapegységekkel (m, kg, s, A).
- Két azonos, 1 C töltésű ponttöltést egymástól 1 m távolságra helyezünk el. Mekkora erővel taszítja egyik a másikat?
- Két azonos töltésű ponttöltést egymástól 1 m távolságra helyezünk el. Ekkor 1 N erővel taszítja egyik a másikat. Mekkora a töltésük?

5. Hidrogénatom. Vizsgáljunk egy egyszerű hidrogén-atommodell, amiben a rögzített proton körül az elektron egyenes körmozgást végez $R = 5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$ távolságban.

- Mekkora az elektron és proton között fellépő vonzóerő?
- Mekkora az elektron centripetális gyorsulása?
- Mekkora az elektron kerületi sebessége?
- Hány nagyságrenddel kisebb az elektron és proton között ható gravitációs erő, mint a köztük ható Coulomb-erő?

Adatok: elektron töltése: $|e| \approx 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$, elektron tömege: $m_e \approx 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, gravitációs (Newton-) állandó: $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

6. Elektronok össztöltése egy makroszkopikus testben. Adott egy töltéssemleges alumíniumtest, amiben az elektronok össztöltése 1 coulomb. Mekkora ennek a testnek a teljes tömege? Adatok: az alumínium rendszáma $Z = 13$, moláris tömege $M = 27 \text{ g/mol}$, az 1 mólnyi alumíniumban lévő atomok száma (azaz az Avogadro-szám) $N_A = 6 \times 10^{23}$.

7. *Elektronok egy egyenlő oldalú háromszög sarkaiban.* Helyezzünk el három elektront egy $a = 1$ nanométer oldalhosszú szabályos háromszög sarkaiban. Vegyük fel úgy a koordinátarendszert, hogy az első elektron az origóban legyen, a második az x tengely pozitív félegyenesén, a harmadik pedig az $x > 0, y > 0$ negyedsíkon. Fejezzük ki mindhárom elektronra ható eredő erővektort egzaktul (paraméteresen) és numerikusan.

8. *Elektromechanika: egyensúly, stabilitás, rezgés.*

Rögzítsünk két azonos, $q_1 = q_2 > 0$ töltésű ponttöltést az x tengelyen, az $\mathbf{r}_1 = (a, 0, 0)$ és $\mathbf{r}_2 = (-a, 0, 0)$ pontokban! Helyezzünk (rögzítés nélkül) egy q nagyságú próbatöltést az $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ pontba.

a) Add meg a próbatöltésre ható erővektort.

b) Lásd be, hogy a próbatöltés az origóban egyensúlyban van.

c) Stabil-e az origóbeli egyensúlyi helyzet, ha $q > 0$?

d) Stabil-e az origóbeli egyensúlyi helyzet, ha $q < 0$?

e) Ha a próbatöltést kicsit kitérítjük az origóból az x tengely mentén, akkor milyen frekvenciával kezd el rezegni? A próbatöltés m tömegét tekintsük adotttnak.